

TD 25 : Relations de comparaison **Indications**

Domination, négligeabilité (suites)

1 ★★ À l'aide du symbole o , comparer les trois suites suivantes :

$$u_n = n^{(\ln n)^2} \quad v_n = (n^2)^{\ln n} \quad w_n = (\ln n)^{n \ln n}$$

Passer à la forme exponentielle.

2 ★★ (Critère de d'Alembert) Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs.

- On suppose qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel qu'à partir d'un certain rang $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq k$. Montrer que la suite (x_n) converge vers 0.
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Dédire de la question précédente que $a^n = o(n!)$.
- Montrer de même que $n! = o(n^n)$.

1) Poser n_0 un rang tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq k$. En déduire une expression de x_n en fonction de x_{n_0} , k et n .

Équivalents (suites)

3 ★★ (Composition à gauche par l'exponentielle) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$. Montrer que $u_n - v_n \rightarrow 0$ si et seulement si $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

Utiliser la définition d'équivalent. Se rappeler qu'on ne peut pas composer à gauche dans un équivalent ! Par contre, la composition à gauche dans une limite est permis...

4 ★★ Trouver un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

$$1) u_n = \frac{n^2 + \sqrt{n^5}}{\ln(4n) + e^n}$$

$$2) u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

$$3) u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \ln n$$

$$4) u_n = \sqrt{4 - \frac{1}{n}} - 2$$

$$5) u_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$$

$$6) u_n = \ln \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

$$7) u_n = e^{\tan \frac{\pi}{n}} - 1$$

$$8) u_n = \sqrt{n}^n + n^{\sqrt{n}}$$

5 ★★ En utilisant un équivalent, déterminer les limites des suites de termes généraux suivants :

$$\bullet u_n = n \times \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2n^2 + n + 1}} \right)$$

$$\bullet v_n = \frac{1 - e^{-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1 - \cos(e^{-\frac{1}{n}})}}$$

$$\bullet w_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

6 ★★ (Classique) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la limite de $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$.

Passer par la forme exponentielle.

7 ★★ Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

En considérant $v_n = \frac{1}{u_n}$, montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Déterminer une expression explicite de v_n , puis de u_n .

8 ★★★ (Composition à gauche par le logarithme) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes strictement positifs. On suppose $u_n \sim v_n$ et que (u_n) et (v_n) tendent vers une limite (commune) $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- On suppose $\ell \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Montrer que $\ln u_n \sim \ln v_n$.
- On suppose $\ell = 0$. En écrivant $u_n = v_n + (u_n - v_n)$, montrer que $\ln u_n \sim \ln v_n$.
- On suppose $\ell = +\infty$. Montrer que $\ln u_n \sim \ln v_n$. On pourra appliquer le résultat de la question précédente à des suites (u'_n) et (v'_n) bien choisies.

Note : finalement, si la limite (commune) de (u_n) et (v_n) est différente de 1, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

4) Application : déterminer un équivalent de $\ln \left(\sin \frac{1}{n} \right)$.

5) Soit $u_n = 1 + e^{-n}$ et $v_n = 1 + e^{-2n}$. Montrer que $u_n \sim v_n$. A-t-on $\ln u_n \sim \ln v_n$?

- 1) Quelle est la limite de $\ln u_n$?
- 2) Comme $u_n \sim v_n$, on a en particulier $u_n - v_n = o(v_n)$.
- 3) Remarquer que $-\ln u_n \sim -\ln v_n$.
- 4) Identifier qui est u_n et trouver un équivalent simple de u_n .

9 ★★★ Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
- 2) Montrer que (u_n) converge vers 0^+ .
- 3) Donner un équivalent simple de (u_n) .

- 1) Exploiter le fait que si deux suites sont équivalentes, elles ont le même signe strict à partir d'un certain rang.
- 2) Utiliser le fait que si deux suites sont équivalentes, elles ont la même limite (si elle existe)
- 3) Chercher un équivalent de $2u_n$.

10 ★★★ Montrer que :

$$1! + 2! + \dots + n! \sim n!$$

Remarquer que

$$\frac{1! + 2! + \dots + (n-1)!}{n!} = \frac{1}{n!} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n}$$

et majorer finement les termes $\frac{1}{n!}, \dots, \frac{1}{(n-1)n}$.

Relations de comparaison (fonctions)

11 ★★ Déterminer un équivalent (simple) en $+\infty$ des expressions suivantes :

- $\ln(1+x) + \sin x$
- $\frac{x^2 - \ln x + 3^x}{x^3 + \sqrt[3]{x^8}}$
- $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$
- $\sqrt{1 + \frac{1}{\ln(x+1)}}$

12 ★★ Déterminer un équivalent (simple) en 0 des expressions suivantes :

- $\frac{(1-e^x) \sin \sqrt{x}}{x^2 + x^3}$
- $\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\ln(1+\sin x)}$
- $\frac{e^x - (1+x^2)^3}{\sqrt{1-\cos x}}$
- $(\cos x)^{\ln x} - 1$

13 ★★ En utilisant les équivalents, déterminer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^x - 1}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$